一般社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
IEICE Technical Report
IT2022-41,SIP2022-92,RCS2022-220(2023-01)

[招待講演] 数理最適化に基づく信号復元と機械学習技術の融合

早川　　諒†

† 大阪大学大学院基礎工学研究科，〒560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1-3
E-mail: †hayakawa.ryo.es@osaka-u.ac.jp

あらまし　未知の信号を観測データから復元する信号復元は，信号処理分野における主要な問題の 1 つである．復元問題の数理的なモデル化と数理最適化に基づく手法は汎用性や解釈性の面で優れている一方で，学習データを用いた機械学習に基づく手法によってより良い性能を達成できることも多い．本稿では，最適化に基づく数理モデルベースの信号復元と機械学習技術を組み合わせるアプローチである深層展開・Plug-and-Play・Consensus Equilibrium などについて述べる．

キーワード　信号復元，数理最適化，機械学習，深層展開，plug-and-play

[Invited Talk] Integration of Optimization-Based Signal Recovery and Machine Learning Techniques

Ryo HAYAKAWA†

† Graduate School of Engineering Science, Osaka University, 1-3, Machikaneyama, Toyonaka, Osaka, 560-8531 Japan
E-mail: †hayakawa.ryo.es@osaka-u.ac.jp

Abstract　Signal recovery from measurement data is one of the fundamental problems in signal processing. The model-based approach with mathematical optimization has generality and interpretability, whereas the data-driven learning-based approach can achieve better recovery performance in many cases. In this paper, we describe some approaches for the integration of model-based methods and machine learning techniques, such as deep unfolding, plug-and-play, and consensus equilibrium.

Key words　Signal recovery, mathematical optimization, machine learning, deep unfolding, plug-and-play

1. は じ め に

未知の信号をその観測データから復元する問題は，信号処理における基本的な問題の 1 つである．例えば，スパースな未知ベクトルの復元を行う圧縮センシング [1], [2]，劣化画像から元のきれいな画像を求める画像復元，無線通信における送信信号の推定 [3] などが挙げられる．

信号復元のための有力な方法の 1 つに，近接写像と呼ばれる作用素を用いた最適化 [4] に基づく手法がある．このようなアプローチでは，信号に関する事前知識を反映させた正則化関数を含んだ最適化問題を解くことで未知信号を推定する．最適化問題を解くためのアルゴリズムとしては，ISTA（Iterative Shrinkage Thresholding Algorithm）[5]〜[7] や FISTA（Fast ISTA）[8] が提案されている．また，ADMM（Alternating Direction Method of Multipliers，交互方向乗数法）[9]〜[11] や PDS（Primal Dual Splitting，主・双対近接分離法）[12], [13] は ISTA や FISTA で解く問題よりも広いクラスの最適化問題に適用可能であり，信号復元のための複雑な最適化問題を解くためによく使われる．

深層学習に基づく信号復元の手法も盛んに検討されている [14], [15]．このような手法では優れた復元精度を得られることもあるものの，それぞれの復元問題に合わせてネットワークの構造を変更したり学習をし直したりする必要がある．また，ネットワークの構造が複雑になると中身の処理の解釈が難しくなるため，最適化に基づく方法と比べると深層学習に基づく方法は相対的に解釈性に乏しいといえる．

本稿では，近接写像を用いた最適化アルゴリズムに基づく信号復元に機械学習技術を活用し，アルゴリズムの収束速度や復元精度を改善する方法として，深層展開 [16]〜[19]・Plug-and-Play [20], [21]・Consensus Equilibrium（合意平衡）[21], [22] を紹介する．これらの手法では，最適化に基づく信号復元の汎用性や解釈性をある程度保ちつつ，機械学習に基づくデータ駆動のアプローチのメリットを生かすことができる．

2. 信号復元問題

本稿では，未知の N 次元ベクトル $\boldsymbol{x} = [x_1\ \cdots\ x_N]^\top \in \mathbb{R}^N$ をその線形観測

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^M \tag{1}$$

から推定する問題を考える．ここで，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}$ は既知の観測行列であり，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^M$ は雑音ベクトルである．

このような復元問題は，信号処理分野の様々なところで登場する．例えば圧縮センシングにおけるスパース信号復元では，$\boldsymbol{x}$ がスパースな（ほとんどの成分が 0 の）未知ベクトル，$\boldsymbol{A}$ が観測過程を表す行列，$\boldsymbol{y}$ が観測ベクトルとなる．画像復元においては，$\boldsymbol{x}$ が復元対象の原画像をベクトル化したもの，$\boldsymbol{A}$ が画像の劣化過程を表す行列，$\boldsymbol{y}$ が劣化画像となる．MIMO（Multiple-Input Multiple-Output）通信における無線信号検出 [3] では，$\boldsymbol{x}$ が送信シンボルベクトル，$\boldsymbol{A}$ が通信路行列，$\boldsymbol{y}$ が受信信号ベクトルとなる．

3. 数理最適化に基づく信号復元

3.1 近接分離アルゴリズム

本項では，数理最適化に基づく信号復元においてよく使われる，近接分離アルゴリズムと呼ばれる種類のアルゴリズム群について述べる．近接分離アルゴリズムでは，下半連続な真凸関数 $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に対して定まる近接写像

$$\mathrm{prox}_{\phi}(\boldsymbol{u}) = \mathop{\arg\min}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^N} \left\{ \phi(\boldsymbol{s}) + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{s} - \boldsymbol{u}\|_2^2 \right\} \tag{2}$$

を用いる（$\|\cdot\|_2$ は ℓ_2 ノルム）．それぞれのアルゴリズムの詳細やより厳密な議論については，[4], [23]〜[25] などを参照されたい．

3.1.1 ISTA，FISTA，Douglas-Rachford アルゴリズム

まず，以下の最適化問題を考える：

$$\mathop{\mathrm{minimize}}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^N} \ \{f(\boldsymbol{s}) + g(\boldsymbol{s})\}. \tag{3}$$

ここで，$f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は下半連続な真凸関数とする．

ISTA [5]〜[7] は近接勾配法とも呼ばれ，関数 $f(\cdot)$ が微分可能でその勾配 $\nabla f(\cdot)$ がリプシッツ連続である場合に，

$$\boldsymbol{u}^{(k+1)} = \boldsymbol{s}^{(k)} - \gamma \nabla f\left(\boldsymbol{s}^{(k)}\right), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{s}^{(k+1)} = \mathrm{prox}_{\gamma g}\left(\boldsymbol{u}^{(k+1)}\right) \tag{5}$$

を反復して式 (3) の最適化問題の解を求めるアルゴリズムである．ここで，γ（> 0）はパラメータである．関数 $g(\cdot)$ の近接写像が効率的に計算可能であれば，$g(\cdot)$ が微分可能でなくても式 (4), (5) の反復計算を行える．

ISTA では $\boldsymbol{s}^{(k+1)}$ を求める際に（直接的には）1 つ前の値 $\boldsymbol{s}^{(k)}$ のみを用いるが，そのさらに 1 つ前の値も用いて収束を加速させるアルゴリズムである FISTA [8] も提案されている．式 (3) の最適化問題に対する FISTA の更新式は

$$\boldsymbol{u}^{(k+1)} = \boldsymbol{w}^{(k)} - \gamma \nabla f\left(\boldsymbol{w}^{(k)}\right), \tag{6}$$

$$\boldsymbol{s}^{(k+1)} = \mathrm{prox}_{\gamma g}\left(\boldsymbol{u}^{(k+1)}\right), \tag{7}$$

$$t_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{4t_k^2 + 1}}{2}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{w}^{(k+1)} = \boldsymbol{s}^{(k+1)} + \frac{t_k - 1}{t_{k+1}} \left(\boldsymbol{s}^{(k+1)} - \boldsymbol{s}^{(k)}\right) \tag{9}$$

で与えられる．ただし，$t_0 = 1$ である．式 (9) の $\boldsymbol{w}^{(k+1)}$ が $\boldsymbol{s}^{(k+1)}$ と $\boldsymbol{s}^{(k)}$ を外分する点になっており，この式によって収束を加速させる効果が得られる．

ISTA や FISTA では関数 $f(\cdot)$ が微分可能であることを前提としているが，Douglas-Rachford アルゴリズム [10], [26] を用いると，$f(\cdot)$ が微分可能でない場合でも $f(\cdot)$ の近接写像が計算できれば最適解に収束する系列を得られる．式 (3) の最適化問題に対する Douglas-Rachford アルゴリズムの更新式は

$$\boldsymbol{s}^{(k+1)} = \mathrm{prox}_{\gamma g}\left(\boldsymbol{u}^{(k)}\right), \tag{10}$$

$$\boldsymbol{u}^{(k+1)} = \boldsymbol{u}^{(k)} + \theta_k \left(\mathrm{prox}_{\gamma f}\left(2\boldsymbol{s}^{(k+1)} - \boldsymbol{u}^{(k)}\right) - \boldsymbol{s}^{(k+1)}\right) \tag{11}$$

で与えられる．ただし，γ（> 0）と $\theta_k \in (0, 2)$ はパラメータである．関数 $f(\cdot)$ が微分可能でも，Douglas-Rachford アルゴリズムによって ISTA や FISTA よりも少ない反復回数で解に近づくことができる場合もある [27], [28]．

3.1.2 ADMM

次に，以下の最適化問題を考える：

$$\begin{aligned} &\mathop{\mathrm{minimize}}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^N, \boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^L} \ \{f(\boldsymbol{s}) + g(\boldsymbol{z})\} \\ &\text{subject to} \quad \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{z}. \end{aligned} \tag{12}$$

ただし，ここでは $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，$g : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，$\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{L\times N}$ としている．

ADMM [9]〜[11] は式 (12) の最適化問題の解を求める反復アルゴリズムであり，その更新式は

$$\boldsymbol{s}^{(k+1)} = \mathop{\arg\min}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^N} \left\{ f(\boldsymbol{s}) + \frac{\rho}{2} \left\|\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{s} - \boldsymbol{z}^{(k)} + \boldsymbol{w}^{(k)}\right\|_2^2 \right\}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{z}^{(k+1)} = \mathop{\arg\min}_{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^L} \left\{ g(\boldsymbol{z}) + \frac{\rho}{2} \left\|\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{s}^{(k+1)} - \boldsymbol{z} + \boldsymbol{w}^{(k)}\right\|_2^2 \right\} \tag{14}$$

$$= \mathrm{prox}_{\frac{1}{\rho} g}\left(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{s}^{(k+1)} + \boldsymbol{w}^{(k)}\right), \tag{15}$$

$$\boldsymbol{w}^{(k+1)} = \boldsymbol{w}^{(k)} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{s}^{(k+1)} - \boldsymbol{z}^{(k+1)} \tag{16}$$

となる．ここで，ρ (> 0) はパラメータである．式 (12) の行列 $\boldsymbol{\Phi}$ を適切に設計することにより，ISTA や FISTA では解けない複雑な最適化問題に対して ADMM を適用できる場合がある．

3.1.3 PDS

最後に，以下の最適化問題を考える：

$$\mathop{\mathrm{minimize}}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^N} \ \{f(\boldsymbol{s}) + g(\boldsymbol{s}) + h(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{s})\}. \tag{17}$$

ここで，$f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，$h : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，$\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{L\times N}$ である．

式 (17) の最適化問題に対する PDS [12], [13] のアルゴリズムは，

$$\boldsymbol{s}^{(k+1)} = \mathrm{prox}_{\gamma_1 g}\left(\boldsymbol{s}^{(k)} - \gamma_1 \left(\nabla f\left(\boldsymbol{s}^{(k)}\right) + \boldsymbol{\Phi}^{\top}\boldsymbol{u}^{(k)}\right)\right), \tag{18}$$

$$\boldsymbol{u}^{(k+1)} = \mathrm{prox}_{\gamma_2 h^*}\left(\boldsymbol{u}^{(k)} + \gamma_2 \boldsymbol{\Phi}\left(2\boldsymbol{s}^{(k+1)} - \boldsymbol{s}^{(k)}\right)\right) \tag{19}$$

で与えられる．ここで，$\gamma_1, \gamma_2 > 0$ はパラメータであり，関数 $h^*(\boldsymbol{r}) := \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^L}\left\{\boldsymbol{r}^\top\boldsymbol{u} - h(\boldsymbol{u})\right\}$ は関数 $h(\cdot)$ の凸共役を表す．凸共役 $h^*(\cdot)$ の近接写像は，$h(\cdot)$ の近接写像を用いて

$$\mathrm{prox}_{\gamma h^*}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - \gamma\mathrm{prox}_{\frac{1}{\gamma}h}\left(\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{u}\right) \tag{20}$$

と書ける．ADMM と同様に，ISTA や FISTA では解けない複雑な最適化問題に対して PDS を適用できる場合がある．

3.2 信号復元問題への適用例

3.2.1 ℓ_1 正則化を用いたスパース信号復元

圧縮センシングにおけるスパース信号復元の手法の 1 つとして，ℓ_1 正則化を用いた最適化問題の解

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \underset{\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^N}{\arg\min}\left\{\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}\|_2^2 + \lambda\|\boldsymbol{s}\|_1\right\} \tag{21}$$

を未知ベクトル $\boldsymbol{x}$ の推定値とするものがある（$\|\cdot\|_1$ は ℓ_1 ノルム）．第一項が式 (1) の観測モデルに基づく項であり，第二項が推定値のスパース性を促進するための正則化項となっている．λ（> 0）は正則化パラメータと呼ばれる．

関数 $f(\cdot), g(\cdot)$ をそれぞれ $f(\boldsymbol{s}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}\|_2^2$, $g(\boldsymbol{s}) = \lambda\|\boldsymbol{s}\|_1$ とおくと，式 (21) の最適化問題は式 (3) の形に書ける．この $f(\cdot), g(\cdot)$ に関して

$$\nabla f(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{A}^\top(\boldsymbol{A}\boldsymbol{s} - \boldsymbol{y}), \tag{22}$$

$$\mathrm{prox}_{\gamma f}(\boldsymbol{s}) = \left(\gamma\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{s} + \gamma\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{y}\right), \tag{23}$$

$$[\mathrm{prox}_{\gamma g}(\boldsymbol{s})]_n = \mathrm{sign}(s_n)\max(|s_n| - \gamma, 0) \tag{24}$$

が成り立つので，ISTA・FISTA や Douglas-Rachford アルゴリズムによって式 (21) の最適化問題の解に収束する系列を得られる．ただし，$\boldsymbol{I}$ は単位行列，$\mathrm{sign}(\cdot)$ は符号関数であり，$[\mathrm{prox}_{\gamma g}(\boldsymbol{s})]_n$ と s_n はそれぞれ $\mathrm{prox}_{\gamma g}(\boldsymbol{s})$ と $\boldsymbol{s}$ の n 番目の要素を表す．式 (12) で $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{I}$ の場合を考えることで，ADMM に基づいて式 (21) の最適化問題を解くこともできる [29].

3.2.2 全変動正則化を用いた画像復元

画像復元において，画像に対する正則化として全変動正則化 [30], [31] を用いる最適化問題

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \underset{\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^N}{\arg\min}\left\{\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}\|_2^2 + \lambda\psi(\boldsymbol{D}\boldsymbol{s})\right\} \tag{25}$$

がある．行列 $\boldsymbol{D}$ は隣り合う画素間の画素値の差分をとるための行列であり，関数 $\psi(\cdot)$ としては ℓ_1 ノルムや混合 $\ell_{1,2}$ ノルムなどが使われる．自然画像の隣り合う画素間の画素値の差分がエッジ部分でのみ大きな値をとり，それ以外の部分ではゼロに近い値をとる場合が多いことを利用した最適化問題となっている．

式 (25) の最適化問題は，$f(\boldsymbol{s}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}\|_2^2$，$g(\boldsymbol{z}) = \lambda\psi(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{D}$ とおくと ADMM が対象とする式 (12) の形に表せる．また，$f(\boldsymbol{s}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}\|_2^2$, $g(\boldsymbol{s}) = 0$, $h(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{s}) = \lambda\psi(\boldsymbol{D}\boldsymbol{s})$ とすることで，PDS が対象とする式 (17) の形にも表せる．したがって，関数 $\psi(\cdot)$ として近接写像が効率的に計算できるものを用いれば，式 (25) の最適化問題のための ADMM や PDS に基づくアルゴリズムを得られる．

3.2.3 Box 制約を用いた無線信号検出

BPSK（Binary Phase Shift Keying）変調を用いたマルチユーザ信号検出において送信シンボルベクトル $\boldsymbol{x} \in \{1, -1\}^N$ を推定するための問題として，Box 制約 $\boldsymbol{s} \in [-1, 1]^N := \left\{\boldsymbol{a} = [a_1 \ \cdots \ a_N]^\top \in \mathbb{R}^N \mid -1 \leq a_n \leq 1\ (n = 1, \ldots, N)\right\}$ を用いた問題

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \underset{\boldsymbol{s}\in[-1,1]^N}{\arg\min}\left\{\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}\|_2^2\right\} \tag{26}$$

が提案されている [32], [33].

式 (26) の最適化問題は，集合 $[-1, 1]^N$ に関する指示関数

$$\iota(\boldsymbol{s}) = \begin{cases} 0 & (\boldsymbol{s} \in [-1, 1]^N) \\ \infty & (\boldsymbol{s} \notin [-1, 1]^N) \end{cases} \tag{27}$$

を関数 $g(\cdot)$ として用いることで式 (3) の形に表せる．凸集合に関する指示関数の近接写像はその凸集合への射影となることから，ISTA・FISTA や Douglas-Rachford アルゴリズムによって最適化問題 (26) の解に収束する系列を得られる．

数理最適化に基づく離散値ベクトルの復元のアプローチとして，Box 制約の代わりに離散値ベクトルのための正則化を用いる手法も提案されている [34]〜[38].

4. 数理最適化と機械学習技術の融合に基づく信号復元

4.1 深層展開

深層展開 [16]〜[19] は，深層学習技術の中核の 1 つである自動微分を用いて，ISTA などの反復アルゴリズムに含まれるパラメータの値を学習するアプローチである．ISTA に基づくアルゴリズムのパラメータを学習してその特性を改善する研究 [39] を嚆矢として，スパース信号復元をはじめとした様々な問題にそのアイデアが応用されている [40]〜[44]．その他の応用例は，[19] を参照されたい．

シンプルな例として，式 (21) に対する ISTA の更新式 (4), (5) に含まれるパラメータ γ を深層展開に基づいて学習する場合を考える．反復ごとに γ の値を $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ と変えてよいとし，一定回数の反復後の ISTA による推定値をパラメータ $\boldsymbol{\Gamma} = \{\gamma_k\ (k = 0, 1, \ldots)\}$ の関数とみなして $\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\Gamma})$ と書く．このとき, 推定値の平均二乗誤差は $\frac{1}{N}\|\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\Gamma}) - \boldsymbol{x}\|_2^2$ となる．学習データとして $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{y})$ の組のデータ $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{y}_1), \ldots, (\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{A}_B, \boldsymbol{y}_B)$ を用意すれば，あるパラメータの値を用いたときの ISTA の推定値の平均二乗誤差（の平均）$E(\boldsymbol{\Gamma}) := \frac{1}{BN}\sum_{b=1}^{B}\|\hat{\boldsymbol{x}}_b(\boldsymbol{\Gamma}) - \boldsymbol{x}_b\|_2^2$ を計算できる．ここで，$\hat{\boldsymbol{x}}_b(\boldsymbol{\Gamma})$ はデータ $(\boldsymbol{x}_b, \boldsymbol{A}_b, \boldsymbol{y}_b)$ に対する ISTA の推定値を表す．この誤差 $E(\boldsymbol{\Gamma})$ を損失関数として，損失関数を小さくするようなパラメータ $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ をうまく学習できれば，パラメータ $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ の適切な値を得られる．この学習の際にパラメータによる損失関数の微分を計算する必要があるが，今回の場合 ISTA の各反復での計算がパラメータに関して微分可能であることから，深層学習で用いられる誤差逆伝播

法によって微分を計算できる．実際に学習する際は，全データを複数のミニバッチに分割し，確率的勾配法に基づいて学習パラメータを更新することが多い．

人手で設計するのは手間がかかる最適化アルゴリズムのパラメータを深層展開によってデータに基づいて学習することで，アルゴリズムの収束速度や復元精度を改善できる．深層展開では元の最適化アルゴリズムの構造を保ったまま学習を行えるため，式 (1) のような観測モデルに関する知見を活用しやすい．また，最適化アルゴリズム中のパラメータはその役割を解釈しやすいことが多いため（例：正則化パラメータ，ステップサイズ），通常の深層ニューラルネットワークと比較して学習結果の解釈性が高いというメリットもある．

深層展開は反復構造をもつ様々なアルゴリズムに適用可能であり，ADMM を用いた研究 [45],[46] や PDS を用いた研究 [47],[48] もなされている．元となるアルゴリズムの選択・パラメータの埋め込み方・学習時の損失関数の設計・データの作成や取得などを問題に合わせて適切に行う必要がある．

4.2 ノイズ除去法の組み込み

4.2.1 Plug-and-Play

Plug-and-Play [21] は，近接分離アルゴリズムにおける正則化項の近接写像を，画像に対するノイズ除去法に置き換える画像復元のアプローチである．ADMM ベースの手法 [20] が初めて提案されて以降，ISTA・FISTA ベースの手法 [49],[50] や PDS ベースの手法 [51] なども提案されている．

ベースとなるアルゴリズムとして ADMM を用いる場合を例にして，Plug-and-Play を用いたアルゴリズムの処理の概要を述べる．式 (12) の最適化問題において $f(\boldsymbol{s}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}\|_2^2$, $g(\boldsymbol{z}) = \lambda R(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{I}$ とすると，

$$\begin{aligned} &\underset{\boldsymbol{s},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^N}{\text{minimize}} \ \left\{\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}\|_2^2 + \lambda R(\boldsymbol{z})\right\} \\ &\text{subject to} \quad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{z} \end{aligned} \tag{28}$$

となる．ここで，$R : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は画像に対する正則化の役割をもつ関数であるが，Plug-and-Play では関数 $R(\cdot)$ の形を明示的に指定しない．式 (28) の最適化問題に対する ADMM における $\boldsymbol{z}^{(k)}$ の更新は，式 (14), (15) から

$$\boldsymbol{z}^{(k+1)} = \underset{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^N}{\arg\min} \left\{\lambda R(\boldsymbol{z}) + \frac{\rho}{2}\left\|\boldsymbol{s}^{(k+1)} - \boldsymbol{z} + \boldsymbol{w}^{(k)}\right\|_2^2\right\} \tag{29}$$

$$= \mathrm{prox}_{\frac{\lambda}{\rho}R}\left(\boldsymbol{s}^{(k+1)} + \boldsymbol{w}^{(k)}\right) \tag{30}$$

となる．関数 $R(\cdot)$ が画像に対する正則化であり，理想としてはきれいな画像に対して小さな値を返す関数であることをふまえると，式 (29) の更新は $\boldsymbol{s}^{(k+1)} + \boldsymbol{w}^{(k)}$ に近いきれいな画像を求める処理，すなわち画像 $\boldsymbol{s}^{(k+1)} + \boldsymbol{w}^{(k)}$ に対するノイズ除去を行っているとみなせる．このような考えに基づいて，Plug-and-Play ADMM では通常の ADMM における $\boldsymbol{z}^{(k)}$ の更新（式 (15)）を画像に対するノイズ除去 $D_{\frac{\lambda}{\rho}}(\cdot)$ へ形式的に置き換え，

$$\boldsymbol{s}^{(k+1)} = \underset{\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^N}{\arg\min} \left\{f(\boldsymbol{s}) + \frac{\rho}{2}\left\|\boldsymbol{s} - \boldsymbol{z}^{(k)} + \boldsymbol{w}^{(k)}\right\|_2^2\right\}, \tag{31}$$

$$\boldsymbol{z}^{(k+1)} = D_{\frac{\lambda}{\rho}}\left(\boldsymbol{s}^{(k+1)} + \boldsymbol{w}^{(k)}\right), \tag{32}$$

$$\boldsymbol{w}^{(k+1)} = \boldsymbol{w}^{(k)} + \boldsymbol{s}^{(k+1)} - \boldsymbol{z}^{(k+1)} \tag{33}$$

を反復して原画像の推定値を求める．式 (32) の $\frac{\lambda}{\rho}$ は，ノイズ除去の強さを決めるパラメータとなる．

ノイズ除去法としては，画像のノイズ除去を行う任意の手法を用いることができる．例えば，NLM（Non Local Means）[52]，BM3D（Block-Matching and 3-D Filtering）[53]，WNNM（Weighted Nuclear Norm Minimization）[54] などの手法のほか，畳み込みニューラルネットワークを用いた DnCNN（Denoising Convolutional Neural Networks）や FFDNet（Fast and Flexible Denoising Convolutional Neural Network）[55] なども用いられる．

Plug-and-Play では，人手で正則化項を設計する代わりに機械学習を用いた強力なノイズ除去法を活用することで，良好な画像復元結果を得られる．一方で，式 (1) の観測モデルに関する知見は式 (12) の関数 $f(\cdot)$ の方で利用できるため，様々な画像・動画の復元問題に Plug-and-Play のアイデアが応用されている [56]〜[59]．既存のノイズ除去法をそのまま使えるため，深層展開とは異なり問題に合わせて学習を行わなくてもよいが，アルゴリズムやノイズ除去に関するパラメータの調整は必要になる．

Plug-and-Play と似たアプローチとして，ノイズ除去法を用いて具体的に正則化項を構成する手法も提案されている [60],[61]．Plug-and-Play は画像復元の文脈で提案された手法であるが，そのアイデアは音響信号処理にも応用されている [62],[63]．

4.2.2 Consensus Equilibrium

Plug-and-Play に基づく手法では最適化アルゴリズムの一部をノイズ除去法に置き換えるため，結果として得られるアルゴリズムがどのような最適化問題を解いていることになるのかは不明瞭である．Plug-and-Play のアプローチを方程式の固定点の観点から解釈し，さらに複数のノイズ除去法を使えるように拡張したのが Consensus Equilibrium [22] である．

Consensus Equilibrium では，式 (3) の最適化問題を一般化した問題として

$$\begin{aligned} &\underset{\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_J\in\mathbb{R}^N}{\text{minimize}} \ \left\{\sum_{j=1}^{J}\mu_j f_j(\boldsymbol{s}_j)\right\} \\ &\text{subject to} \quad \boldsymbol{s}_j = \boldsymbol{s}\ (j = 1,\ldots,J) \end{aligned} \tag{34}$$

を考える．ここで，μ_j（$j = 1,\ldots,J$）は $\sum_{j=1}^{J}\mu_j = 1$ をみたす正の値である．関数 $f_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$（$j = 1,\ldots,J$）がすべて下半連続な真凸関数である場合，式 (34) の最適化問題の $\boldsymbol{s}$ の解の集合は，方程式

$$F_j\left(\boldsymbol{s}^* + \boldsymbol{u}_j^*\right) = \boldsymbol{s}^* \quad (j = 1,\ldots,J), \tag{35}$$

$$\sum_{j=1}^{J}\mu_j\boldsymbol{u}_j^* = \boldsymbol{0} \tag{36}$$

をみたす $\boldsymbol{s}^*$ の集合と一致する [22][1]．ここで，$\boldsymbol{u}_j^* \in \mathbb{R}^N, F_j(\boldsymbol{r}) =$

（注1）：式 (35) によって各 F_j の出力が一致し（consensus, 合意），式 (36) によって $\boldsymbol{u}_j^*$ の重み付き和が $\boldsymbol{0}$ になる（equilibrium，平衡）ため，consensus equilibrium という名前がついている．

$\mathrm{prox}_{\gamma f_j}(\boldsymbol{r})$（$j = 1, \ldots, J$）である．さらに $\boldsymbol{z}_j^* = \boldsymbol{s}^* + \boldsymbol{u}_j^*$（$j = 1, \ldots, J$）および $\boldsymbol{z}^* = \left[\left(\boldsymbol{z}_1^*\right)^\top \cdots \left(\boldsymbol{z}_J^*\right)^\top \right]^\top \in \mathbb{R}^{JN}$ とおき，関数 $F, G : \mathbb{R}^{JN} \to \mathbb{R}^{JN}$ をそれぞれ

$$F(\boldsymbol{z}^*) = \begin{bmatrix} F_1\left(\boldsymbol{z}_1^*\right) \\ \vdots \\ F_J\left(\boldsymbol{z}_J^*\right) \end{bmatrix}, \ G(\boldsymbol{z}^*) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^J \mu_j \boldsymbol{z}_j^* \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^J \mu_j \boldsymbol{z}_j^* \end{bmatrix} \tag{37}$$

と定義すると，式 (35), (36) の条件は

$$F\left(\boldsymbol{z}^*\right) = G\left(\boldsymbol{z}^*\right), \tag{38}$$

$$\sum_{j=1}^J \mu_j \boldsymbol{z}_j^* = \boldsymbol{s}^* \tag{39}$$

と書ける．したがって，式 (38) をみたす $\boldsymbol{z}^*$ を求め，式 (39) によって $\boldsymbol{s}^*$ を計算すれば，式 (34) の最適化問題の解が求まる．式 (35) をみたす $\boldsymbol{z}^*$ は写像 $T = (2G - I)(2F - I)$（I は恒等写像）の固定点として特徴づけられ，T が非拡大写像で固定点をもてば，Mann iteration

$$\boldsymbol{z}^{(k+1)} = (1-\rho)\boldsymbol{z}^{(k)} + \rho T\left(\boldsymbol{z}^{(k)}\right) \tag{40}$$

によって固定点に収束する系列を得られる．ここで，ρ（> 0）はパラメータである．

Plug-and-Play のアイデアに基づいて，$f(\boldsymbol{s}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}\|_2^2$ の近接写像や画像のノイズ除去法を $F_j(\cdot)$ として用いることで，複数のノイズ除去法を画像復元に用いることができる．これにより，単一のノイズ除去法を用いる場合と比べて良好な復元結果を得られることが実験的に示されている [21], [22], [64].

5. ま と め

本稿では，数理最適化と機械学習技術を融合させた信号復元のアプローチとして，深層展開・Plug-and-Play・Consensus Equilibrium について概説した．数理最適化に基づくモデルベースのアルゴリズムの構造を保持したまま，人手による設計が困難な部分に機械学習技術を活用することで，汎用性や解釈性をある程度保ちつつ収束速度や復元精度を改善できる．

文　献

[1] E. J. Candès and T. Tao, “Decoding by linear programming,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, no. 12, pp. 4203–4215, Dec. 2005.

[2] D. L. Donoho, “Compressed sensing,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, Apr. 2006.

[3] A. Chockalingam and B. S. Rajan, *Large MIMO Systems*, Cambridge, U.K., 2014.

[4] P. L. Combettes and J.-C. Pesquet, “Proximal splitting methods in signal processing,” in *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering*, ser. Springer Optimization and Its Applications, New York, NY, 2011, vol. 49, pp. 185–212.

[5] I. Daubechies, M. Defrise, and C. D. Mol, “An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 57, no. 11, pp. 1413–1457, 2004.

[6] P. L. Combettes and V. R. Wajs, “Signal recovery by proximal forward-backward splitting,” *Multiscale Model. Simul.*, vol. 4, no. 4, pp. 1168–1200, Jan. 2005.

[7] M. A. T. Figueiredo, R. D. Nowak, and S. J. Wright, “Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems,” *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, vol. 1, no. 4, pp. 586–597, Dec. 2007.

[8] A. Beck and M. Teboulle, “A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems,” *SIAM J. Imaging Sci.*, vol. 2, no. 1, pp. 183–202, Jan. 2009.

[9] D. Gabay and B. Mercier, “A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 2, no. 1, pp. 17–40, Jan. 1976.

[10] J. Eckstein and D. P. Bertsekas, “On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators,” *Mathematical Programming*, vol. 55, no. 1, pp. 293–318, Apr. 1992.

[11] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, and J. Eckstein, “Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers,” *Found. Trends Mach. Learn.*, vol. 3, no. 1, pp. 1–122, Jan. 2011.

[12] L. Condat, “A primal–dual splitting method for convex optimization involving lipschitzian, proximable and linear composite terms,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 158, no. 2, pp. 460–479, Aug. 2013.

[13] B. C. Vũ, “A splitting algorithm for dual monotone inclusions involving cocoercive operators,” *Adv Comput Math*, vol. 38, no. 3, pp. 667–681, Apr. 2013.

[14] M. T. McCann, K. H. Jin, and M. Unser, “Convolutional neural networks for inverse problems in imaging: A review,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 34, no. 6, pp. 85–95, Nov. 2017.

[15] A. Lucas, M. Iliadis, R. Molina, and A. K. Katsaggelos, “Using deep neural networks for inverse problems in imaging: Beyond analytical methods,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 35, no. 1, pp. 20–36, Jan. 2018.

[16] J. R. Hershey, J. L. Roux, and F. Weninger, “Deep unfolding: Model-based inspiration of novel deep architectures,” *arXiv:1409.2574*, Nov. 2014.

[17] A. Balatsoukas-Stimming and C. Studer, “Deep unfolding for communications systems: A survey and some new directions,” in *Proc. IEEE International Workshop on Signal Processing Systems (SiPS)*, Oct. 2019, pp. 266–271.

[18] 和田山 正, 高邉 賢史, “深層展開に基づく信号処理アルゴリズムの設計〜収束加速とその理論的解釈〜,” **電子情報通信学会 基礎・境界ソサイエティ** *Fundamentals Review*, vol. 14, no. 1, pp. 60–72, 2020.

[19] V. Monga, Y. Li, and Y. C. Eldar, “Algorithm unrolling: Interpretable, efficient deep learning for signal and image processing,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 38, no. 2, pp. 18–44, Mar. 2021.

[20] S. V. Venkatakrishnan, C. A. Bouman, and B. Wohlberg, “Plug-and-play priors for model based reconstruction,” in *Proc. IEEE Global Conference on Signal and Information Processing (GlobalSIP)*, Dec. 2013, pp. 945–948.

[21] U. S. Kamilov, C. A. Bouman, G. T. Buzzard, and B. Wohlberg, “Plug-and-play methods for integrating physical and learned models in computational imaging,” *arXiv:2203.17061*, Aug. 2022.

[22] G. T. Buzzard, S. H. Chan, S. Sreehari, and C. A. Bouman, “Plug-and-play unplugged: Optimization-free reconstruction using consensus equilibrium,” *SIAM J. Imaging Sci.*, vol. 11, no. 3, pp. 2001–2020, Jan. 2018.

[23] 小野 峻佑, “近接分離による分散凸最適化―交互方向乗数法に基づくアプローチを中心として―,” **計測と制御**, vol. 55, no. 11, pp. 954–959, 2016.

[24] 永原 正章, “スパースモデリングのための凸最適化―近接勾配法による高速アルゴリズム,” **システム／制御／情報**, vol. 61, no. 1, pp. 20–28, 2017.

[25] 小野 峻佑, “近接分離アルゴリズムとその応用―信号処理・画像処理的観点から―,” **オペレーションズ・リサーチ** = *Communications of the Operations Research Society of Japan* : **経営の科学**, vol. 64, no. 6, pp. 316–325, 2019.

[26] P. Lions and B. Mercier, “Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators,” *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 16, no. 6, pp. 964–979, Dec. 1979.

[27] P. L. Combettes and L. E. Glaudin, “Proximal activation of smooth functions in splitting algorithms for convex image recovery,” *SIAM J. Imaging Sci.*, vol. 12, no. 4, pp. 1905–1935, Jan. 2019.

[28] ——, “Fully proximal splitting algorithms in image recovery,” in *Proc. 27th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Sep. 2019, pp. 1–5.

[29] R. Hayakawa, “Asymptotic performance prediction for ADMM-based compressed sensing,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 70, pp. 5194–5207, 2022.

[30] L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, “Nonlinear total variation based noise removal algorithms,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 60, no. 1, pp. 259–268, Nov. 1992.

[31] L. Condat, “Discrete total variation: New definition and minimization,” *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 10, no. 3, pp. 1258–1290, Aug. 2017.

[32] P. H. Tan, L. K. Rasmussen, and T. J. Lim, “Constrained maximum-likelihood detection in CDMA,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 49, no. 1, pp. 142–153, Jan. 2001.

[33] A. Yener, R. D. Yates, and S. Ulukus, “CDMA multiuser detection: A nonlinear programming approach,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, no. 6, pp. 1016–1024, Jun. 2002.

[34] A. Aïssa-El-Bey, D. Pastor, S. M. A. Sbaï, and Y. Fadlallah, “Sparsity-based recovery of finite alphabet solutions to underdetermined linear systems,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 61, no. 4, pp. 2008–2018, Apr. 2015.

[35] M. Nagahara, “Discrete signal reconstruction by sum of absolute values,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 22, no. 10, pp. 1575–1579, Oct. 2015.

[36] H. Sasahara, K. Hayashi, and M. Nagahara, “Multiuser detection based on MAP estimation with sum-of-absolute-values relaxation,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, no. 21, pp. 5621–5634, Nov. 2017.

[37] R. Hayakawa and K. Hayashi, “Convex optimization-based signal detection for massive overloaded MIMO systems,” *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 16, no. 11, pp. 7080–7091, Nov. 2017.

[38] ——, “Discrete-valued vector reconstruction by optimization with sum of sparse regularizers,” in *Proc. 27th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Sep. 2019, pp. 1–5.

[39] K. Gregor and Y. LeCun, “Learning fast approximations of sparse coding,” in *Proc. the 27th International Conference on International Conference on Machine Learning*, Jun. 2010, pp. 399–406.

[40] D. Ito, S. Takabe, and T. Wadayama, “Trainable ISTA for sparse signal recovery,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 67, no. 12, pp. 3113–3125, Jun. 2019.

[41] S. Takabe, M. Imanishi, T. Wadayama, R. Hayakawa, and K. Hayashi, “Trainable projected gradient detector for massive overloaded MIMO channels: Data-driven tuning approach,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 93 326–93 338, 2019.

[42] T. Wadayama and S. Takabe, “Deep learning-aided trainable projected gradient decoding for LDPC codes,” in *Proc. 2019 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, Jul. 2019, pp. 2444–2448.

[43] Y. Li, M. Tofighi, J. Geng, V. Monga, and Y. C. Eldar, “Efficient and interpretable deep blind image deblurring via algorithm unrolling,” *IEEE Transactions on Computational Imaging*, vol. 6, pp. 666–681, 2020.

[44] M. Nagahama, K. Yamada, Y. Tanaka, S. H. Chan, and Y. C. Eldar, “Graph signal restoration using nested deep algorithm unrolling,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 70, pp. 3296–3311, 2022.

[45] Y. Yang, J. Sun, H. Li, and Z. Xu, “Deep ADMM-net for compressive sensing MRI,” in *Proc. Advances in Neural Information Processing Systems*, vol. 29, 2016.

[46] V. Kouni, G. Paraskevopoulos, H. Rauhut, and G. C. Alexandropoulos, “ADMM-DAD net: A deep unfolding network for analysis compressed sensing,” in *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, May 2022, pp. 1506–1510.

[47] J. Adler and O. Öktem, “Learned primal-dual reconstruction,” *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 37, no. 6, pp. 1322–1332, Jun. 2018.

[48] M. Jiu and N. Pustelnik, “A deep primal-dual proximal network for image restoration,” *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, vol. 15, no. 2, pp. 190–203, Feb. 2021.

[49] Y. Sun, B. Wohlberg, and U. S. Kamilov, “An online plug-and-play algorithm for regularized image reconstruction,” *IEEE Transactions on Computational Imaging*, vol. 5, no. 3, pp. 395–408, Sep. 2019.

[50] R. G. Gavaskar and K. N. Chaudhury, “Plug-and-play ISTA converges with kernel denoisers,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 27, pp. 610–614, 2020.

[51] S. Ono, “Primal-dual plug-and-play image restoration,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 24, no. 8, pp. 1108–1112, Aug. 2017.

[52] A. Buades, B. Coll, and J.-M. Morel, “A non-local algorithm for image denoising,” in *Proc. 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR’05)*, vol. 2, Jun. 2005, pp. 60–65.

[53] K. Dabov, A. Foi, V. Katkovnik, and K. Egiazarian, “Image denoising by sparse 3-D transform-domain collaborative filtering,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 16, no. 8, pp. 2080–2095, Aug. 2007.

[54] S. Gu, L. Zhang, W. Zuo, and X. Feng, “Weighted nuclear norm minimization with application to image denoising,” in *Proc. 2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Jun. 2014, pp. 2862–2869.

[55] Y. Zhang, Q. Fan, F. Bao, Y. Liu, and C. Zhang, “Single-image super-resolution based on rational fractal interpolation,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 27, no. 8, pp. 3782–3797, Aug. 2018.

[56] S. H. Chan, X. Wang, and O. A. Elgendy, “Plug-and-play ADMM for image restoration: Fixed-point convergence and applications,” *IEEE Transactions on Computational Imaging*, vol. 3, no. 1, pp. 84–98, Mar. 2017.

[57] A. Brifman, Y. Romano, and M. Elad, “Unified single-image and video super-resolution via denoising algorithms,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 28, no. 12, pp. 6063–6076, Dec. 2019.

[58] K. Zhang, Y. Li, W. Zuo, L. Zhang, L. Van Gool, and R. Timofte, “Plug-and-play image restoration with deep denoiser prior,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 44, no. 10, pp. 6360–6376, Oct. 2022.

[59] X. Yuan, Y. Liu, J. Suo, F. Durand, and Q. Dai, “Plug-and-play algorithms for video snapshot compressive imaging,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 44, no. 10, pp. 7093–7111, Oct. 2022.

[60] Y. Romano, M. Elad, and P. Milanfar, “The little engine that could: Regularization by denoising (RED),” *SIAM J. Imaging Sci.*, vol. 10, no. 4, pp. 1804–1844, Jan. 2017.

[61] E. T. Reehorst and P. Schniter, “Regularization by denoising: Clarifications and new interpretations,” *IEEE Transactions on Computational Imaging*, vol. 5, no. 1, pp. 52–67, Mar. 2019.

[62] Y. Masuyama, K. Yatabe, Y. Koizumi, Y. Oikawa, and N. Harada, “Deep griffin–lim iteration: Trainable iterative phase reconstruction using neural network,” *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, vol. 15, no. 1, pp. 37–50, Jan. 2021.

[63] T. Tanaka, K. Yatabe, M. Yasuda, and Y. Oikawa, “APPLADE: Adjustable plug-and-play audio declipper combining DNN with sparse optimization,” in *Proc. 2022 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, May 2022, pp. 1011–1015.

[64] R. Hyder, H. Mansour, Y. Ma, P. T. Boufounos, and P. Wang, “A consensus equilibrium solution for deep image prior powered by RED,” in *Proc. 2021 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Jun. 2021, pp. 1380–1384.