

[ポスター講演] スパース正則化項の和を用いた 複素離散値ベクトル再構成

早川 諒[†] 林 和則^{††}

[†] 京都大学大学院情報学研究科 〒606-8501 京都市左京区吉田本町
^{††} 大阪市立大学大学院工学研究科 〒558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138
E-mail: rhayakawa@sys.i.kyoto-u.ac.jp, kazunori@eng.osaka-cu.ac.jp

あらまし 本稿では、複素離散値ベクトルをその線形観測から再構成するための SCSR (Sum of Complex Sparse Regularizers) 最適化問題を提案する。SCSR 最適化では、スパース正則化項の和を複素離散値ベクトルに対する正則化項として用いる。また、SCSR 最適化を重み付き SCSR 最適化に拡張し、重み付き SCSR 最適化とその目的関数のパラメータ更新を繰り返し行う手法である IW-SCSR (Iterative Weighted SCSR) も提案する。計算機シミュレーションにより、提案手法が劣線形観測から複素離散値ベクトルを再構成できることを示す。

キーワード 複素離散値ベクトル再構成, 凸最適化, ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers)

[Poster Presentation] Sum of Complex Sparse Regularizers Optimization for Complex Discrete-Valued Vector Reconstruction

Ryo HAYAKAWA[†] and Kazunori HAYASHI^{††}

[†] Graduate School of Informatics, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501 Japan
^{††} Graduate School of Engineering, Osaka City University, 3-3-138 Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka, 558-8585
Japan

E-mail: rhayakawa@sys.i.kyoto-u.ac.jp, kazunori@eng.osaka-cu.ac.jp

Abstract In this paper, we propose sum of complex sparse regularizers (SCSR) optimization problem for the reconstruction of complex discrete-valued vector from its linear measurements. In the SCSR optimization, we use the sum of sparse regularizers as a regularizer for the complex discrete-valued vector. We extend the SCSR optimization to the weighted SCSR optimization and propose an iterative approach called iterative weighted SCSR (IW-SCSR), where we iterate the weighted SCSR optimization and the update of the parameters in the objective function. Simulation results show that the propose method can reconstruct the complex discrete-valued vector from its underdetermined linear measurements.

Key words Complex discrete-valued vector reconstruction, convex optimization, alternating direction method of multipliers (ADMM)

1. ま え が き

MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) 信号検出 [1-3] や M2M (Machine-to-Machine) 通信でのマルチユーザ検出 [4-6] を始めとして、通信システムにおいては複素離散値ベクトルをその線形観測から再構成する問題がよく現れる。とくに過負荷 MIMO システム [7-11] や FTN (faster-than-Nyquist) 伝送 [12-15] などのように観測の数が不十分な状況においては、LMMSE (Linear Minimum Mean-Square-Error) 法などの線形の手法の特性は大きく劣化する。また、最尤推定に基づく手

法は良い特性を達成可能であるが、問題のサイズに対して計算量が指数的に増大してしまう。そのため、大規模な離散値ベクトルの再構成においては低演算量な手法が必要となる。

低演算量なアプローチとして、確率伝播法や期待値伝播法のアイデアを応用した手法が提案されている [16-19]。これらのアルゴリズムの導出や理論解析においては大システム極限が仮定されており、有限サイズの問題に対しては特性が劣化する場合がある。一方で、実数領域における凸最適化に基づく手法 [20-22] も提案されているが、これらの手法を複素離散値ベクトルの再構成に利用する場合、実部と虚部の依存関係を陽に

考慮することができない。

本稿では、実数領域における凸最適化に基づく手法の一つである SOAV (Sum of Absolute Values) 最適化 [22] のアイデアを拡張した複素離散値ベクトル再構成手法を提案する。提案最適化問題の SCSR (Sum of Complex Sparse Regularizers) 最適化は複素数領域における最適化問題であり、スパース正則化項の和を複素離散値ベクトルに対する正則化項として用いる。ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers) [23–27] に基づくアルゴリズムによって、SCSR 最適化問題に収束する点列を得られる。さらに、SCSR 最適化を重み付き SCSR 最適化に拡張し、重み付き SCSR 最適化とその目的関数のパラメータ更新を繰り返し行う IW-SCSR (Iterative Weighted SCSR) を提案する。計算機シミュレーションにより、提案手法の SER (Symbol Error Rate) 特性を評価する。

本稿では、以下の記法を用いる。すべての実数からなる集合を \mathbb{R} 、すべての複素数からなる集合を \mathbb{C} とする。 $\text{Re}\{\cdot\}$ と $\text{Im}\{\cdot\}$ はそれぞれ実部と虚部を表す。虚数単位を j 、転置を $(\cdot)^T$ 、エルミート転置を $(\cdot)^H$ 、 $N \times N$ 単位行列を \mathbf{I}_N 、成分がすべて 1 のベクトルを $\mathbf{1}$ 、成分が 0 のベクトルを $\mathbf{0}$ と書く。ベクトル $\mathbf{u} = [u_1 \cdots u_N]^T \in \mathbb{C}^N$ に対して、その ℓ_1 ノルムと ℓ_2 ノルムをそれぞれ $\|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{n=1}^N |u_n|$ および $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^N |u_n|^2}$ と書く。 $[u_n]$ は \mathbf{u} の n 番目の成分を表す。符号関数を $\text{sign}(\cdot)$ で表す。関数 $h: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、その近接写像を $\text{prox}_h(\mathbf{u}) = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^N} \left\{ h(\mathbf{s}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{s} - \mathbf{u}\|_2^2 \right\}$ とする。

2. 複素離散値ベクトル再構成

複素離散値ベクトル $\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_N]^T \in \mathbb{C}^N \subset \mathbb{C}^N$ をその線形観測

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v} \in \mathbb{C}^M \quad (1)$$

から再構成する問題を考える。ここで、 $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_L\}$ は未知ベクトル \mathbf{x} の成分がとりうる値の集合である。未知ベクトル \mathbf{x} の分布は $\Pr(x_n = c_\ell) = p_\ell$ ($\sum_{\ell=1}^L p_\ell = 1$) で与えられるとする ($\ell = 1, \dots, L$)。 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ は観測行列であり、 $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^M$ は平均 $\mathbf{0}$ で共分散行列 $\sigma_v^2 \mathbf{I}_M$ の加法性雑音ベクトルである。

実数領域における離散値ベクトル再構成アルゴリズムは実部と虚部の依存関係を考慮できないため、一般の複素数領域の問題には適切でない場合がある。 $\mathcal{C} = \{1 + j, -1 + j, -1 - j, 1 - j\}$ のように \mathcal{C} の要素の実部と虚部が独立である場合、式 (1) の複素数領域のモデルは実数領域のモデル

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{v}} \quad (2)$$

に変換することができる。ここで、 $\bar{\mathbf{y}} = [\text{Re}\{\mathbf{y}\}^T \text{Im}\{\mathbf{y}\}^T]^T \in \mathbb{R}^{2M}$ 、 $\bar{\mathbf{x}} = [\text{Re}\{\mathbf{x}\}^T \text{Im}\{\mathbf{x}\}^T]^T \in \mathbb{R}^{2N}$ 、 $\bar{\mathbf{v}} = [\text{Re}\{\mathbf{v}\}^T \text{Im}\{\mathbf{v}\}^T]^T \in \mathbb{R}^{2M}$ および

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{A}\} & -\text{Im}\{\mathbf{A}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{A}\} & \text{Re}\{\mathbf{A}\} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2M \times 2N} \quad (3)$$

である。このような場合、元の複素離散値ベクトル \mathbf{x} を実離散値ベクトル $\bar{\mathbf{x}}$ の再構成によって求めてもよいが、 \mathcal{C} の要素の実部と虚部が独立でない場合は、そのようなアプローチは不適切である。例えば、 $\mathcal{C} = \left\{ e^{j(\ell-1)\pi/4} \mid \ell = 1, \dots, 8 \right\}$ の場合、実数領域でのアプローチでは実離散値ベクトル $\bar{\mathbf{x}} \in \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1 \right\}^{2N}$ を再構成することになり、実部と虚部の依存性を考慮することができない。このような場合、未知ベクトル \mathbf{x} を複素数領域で直接再構成するのが望ましいと考えられる。

3. 提案手法

3.1 SCSR 最適化

実数領域における手法である SOAV 最適化 [22] のアイデアを拡張し、SCSR 最適化を提案する。提案 SCSR 最適化問題は

$$\underset{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^N}{\text{minimize}} \sum_{\ell=1}^L q_\ell g_\ell(\mathbf{s} - c_\ell \mathbf{1}) + \lambda \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2^2 \quad (4)$$

で与えられる。ここで λ と $q_\ell \geq 0$ ($\ell = 1, \dots, L$) はパラメータである。関数 $g_\ell(\cdot)$ はスパース正則化の関数であり、本稿では

$$h_1(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{n=1}^N \sqrt{\text{Re}\{u_n\}^2 + \text{Im}\{u_n\}^2}, \quad (5)$$

$$h_2(\mathbf{u}) = \|\text{Re}\{\mathbf{u}\}\|_1 + \|\text{Im}\{\mathbf{u}\}\|_1 \quad (6)$$

$$= \sum_{n=1}^N (|\text{Re}\{u_n\}| + |\text{Im}\{u_n\}|) \quad (7)$$

の 2 種類の正則化を考える。 $h_1(\cdot)$ は複素数の絶対値に基づく ℓ_1 正則化であり、 $h_2(\cdot)$ は実部と虚部それぞれに実数領域の ℓ_1 正則化を適用する。この正則化は $\mathbf{x} - c_\ell \mathbf{1}$ の成分のいくつかが 0 になることに基づいており、 $\sum_{\ell=1}^L q_\ell g_\ell(\mathbf{s} - c_\ell \mathbf{1})$ は複素離散値ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ に対する正則化と考えることができる。

3.2 スパース正則化関数の選択

SCSR 最適化 (4) におけるスパース正則化関数 $g_\ell(\cdot)$ は、未知変数がとる値の集合 \mathcal{C} に応じて $h_1(\cdot)$ および $h_2(\cdot)$ から選択する必要がある。図 1 は、 $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1 + j, -1 + j, -1 - j, 1 - j)$ および $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$ の場合の正則化関数 $\sum_{\ell=1}^L q_\ell g_\ell(\mathbf{s} - c_\ell)$ の等高線を示す。図 1(a) と図 1(b) はそれぞれ $g_\ell(\cdot) = h_1(\cdot)$ および $g_\ell(\cdot) = h_2(\cdot)$ ($\ell = 1, \dots, 4$) のときの等高線を示す。2 つの等高線は大きく異なっており、 $g_\ell(\cdot) = h_1(\cdot)$ の場合は $\sum_{\ell=1}^4 q_\ell g_\ell(\mathbf{s} - c_\ell)$ は $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ のみで最小値を取るのに対し、 $g_\ell(\cdot) = h_2(\cdot)$ の場合は集合 $\{s \mid \text{Re}\{s\} \in [-1, 1], \text{Im}\{s\} \in [-1, 1]\}$ 上で最小値をとる。 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ の離散性を用いるという観点からは、正則化関数 $\sum_{\ell=1}^4 q_\ell g_\ell(\mathbf{s} - c_\ell)$ は少なくとも $\mathcal{C} = \{1 + j, -1 + j, -1 - j, 1 - j\}$ の要素に対して最小値を取るべきであるから、この場合は図 1(b) にあるように $g_\ell(\cdot)$ として $h_2(\cdot)$ を用いるのが望ましいといえる。別の例として、 $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (0, 1 + j, -1 + j, -1 - j, 1 - j)$ および $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = (0.8, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05)$ の場合の等高線を図 2 に示す。図 2(a) では $g_1(\cdot) = h_1(\cdot)$ および $g_\ell(\cdot) = h_2(\cdot)$

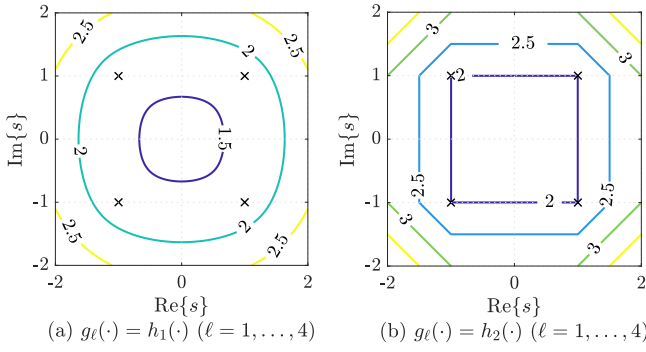


図1 関数 $\sum_{\ell=1}^4 q_\ell g_\ell(s - c_\ell)$ の等高線: $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1+j, -1+j, -1-j, 1-j)$ および $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$ であり、バツ印は c_ℓ ($\ell = 1, \dots, 4$) を示す。

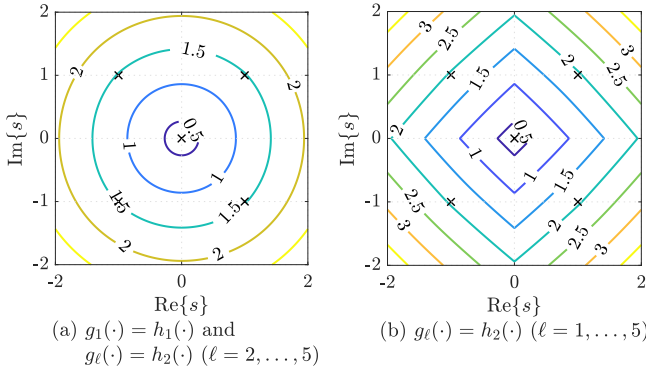


図2 関数 $\sum_{\ell=1}^5 q_\ell g_\ell(s - c_\ell)$ の等高線: $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (0, 1+j, -1+j, -1-j, 1-j)$ および $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) = (0.8, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05)$ であり、バツ印は c_ℓ ($\ell = 1, \dots, 5$) を示す。

($\ell = 2, \dots, 5$) であり、図2(b)では $g_\ell(\cdot) = h_2(\cdot)$ ($\ell = 1, \dots, 5$) である。図2(b)の正則化では実部と虚部を別々に扱うので、実部と虚部のどちらか一方のみが0となりやすい。ところが集合 $\mathcal{C} = \{0, 1+j, -1+j, -1-j, 1-j\}$ 上では実部と虚部は同時に0となるので、この場合は図2(a)にあるような $g_1(\cdot) = h_1(\cdot)$ および $g_\ell(\cdot) = h_2(\cdot)$ ($\ell = 2, \dots, 5$) で定まる正則化関数を用いるのがよいと期待される。

3.3 ADMMに基づく最適化アルゴリズム

ADMM [23–27] のアプローチに基づいて、SCSR最適化(4)に対する最適化アルゴリズムを導出する。最適化問題(4)は、新たな変数 $z_1, \dots, z_L \in \mathbb{C}^N$ を用いて

$$\begin{aligned} & \underset{s, z_1, \dots, z_L \in \mathbb{C}^N}{\text{minimize}} \sum_{\ell=1}^L q_\ell g_\ell(z_\ell - c_\ell \mathbf{1}) + \lambda \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2^2 \\ & \text{subject to } \mathbf{s} = z_\ell \quad (\ell = 1, \dots, L) \end{aligned} \quad (8)$$

と書き換えられる。さらに、式(8)はADMMの標準形

$$\begin{aligned} & \underset{s \in \mathbb{C}^N, z \in \mathbb{C}^{LN}}{\text{minimize}} f(\mathbf{s}) + g(\mathbf{z}) \\ & \text{subject to } \Phi \mathbf{s} = \mathbf{z} \end{aligned} \quad (9)$$

に変形できる。ここで、 $\mathbf{z} = [z_1^\top \dots z_L^\top]^\top \in \mathbb{C}^{LN}$ 、 $f(\mathbf{s}) = \lambda \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2^2$ 、 $g(\mathbf{z}) = \sum_{\ell=1}^L q_\ell g_\ell(z_\ell - c_\ell \mathbf{1})$ 、および $\Phi =$

Algorithm 1 Proposed Algorithm for SCSR Optimization (9)

Input: $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times N}$

Output: $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^N$

- 1: Fix $\rho > 0$, $\mathbf{z}^0 \in \mathbb{C}^{LN}$, and $\mathbf{w}^0 \in \mathbb{C}^{LN}$
- 2: **for** $k = 0$ to $K - 1$ **do**
- 3: $\mathbf{s}^{k+1} = (\rho L \mathbf{I}_N + \lambda \mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1}$
- 4: $\cdot \left(\rho \sum_{\ell=1}^L (z_\ell^k - \mathbf{w}_\ell^k) + \lambda \mathbf{A}^H \mathbf{y} \right)$
- 5: $z_\ell^{k+1} = c_\ell \mathbf{1} + \text{prox}_{\frac{q_\ell}{2\rho} g_\ell}(\mathbf{s}^{k+1} + \mathbf{w}_\ell^k - c_\ell \mathbf{1})$
- 6: $(\ell = 1, \dots, L)$
- 7: $\mathbf{w}_\ell^{k+1} = \mathbf{w}_\ell^k + \mathbf{s}^{k+1} - z_\ell^{k+1}$ ($\ell = 1, \dots, L$)
- 8: **end for**
- 9: $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{s}^K$

$[\mathbf{I}_N \dots \mathbf{I}_N]^\top \in \mathbb{R}^{LN \times N}$ である。式(9)に対するADMMに基づく最適化アルゴリズムはAlgorithm 1のようになる。

Algorithm 1においては、 $g_\ell(\cdot)$ の候補である $h_1(\cdot)$ と $h_2(\cdot)$ に関する近接写像の計算が必要となる。[27]の結果から、 $\gamma h_1(\cdot)$ ($\gamma > 0$)の近接写像は

$$[\text{prox}_{\gamma h_1}(\mathbf{u})]_n = \begin{cases} (|u_n| - \gamma) \frac{u_n}{|u_n|} & (|u_n| \geq \gamma) \\ 0 & (|u_n| < \gamma) \end{cases} \quad (10)$$

と計算できる。ここで、 $\mathbf{u} = [u_1 \dots u_N]^\top \in \mathbb{C}^N$ である。また、 $\gamma h_2(\cdot)$ の近接写像は

$$\begin{aligned} & \text{prox}_{\gamma h_2}(\mathbf{u}) \\ & = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^N} \left\{ \gamma h_2(\mathbf{s}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{s} - \mathbf{u}\|_2^2 \right\} \quad (11) \\ & = \arg \min_{\substack{\mathbf{s} = \mathbf{s}_R + j\mathbf{s}_I \in \mathbb{C}^N \\ (\mathbf{s}_R, \mathbf{s}_I \in \mathbb{R}^N)}} \left\{ \left(\gamma \|\mathbf{s}_R\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{s}_R - \mathbf{u}_R\|_2^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\gamma \|\mathbf{s}_I\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{s}_I - \mathbf{u}_I\|_2^2 \right) \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{u}_R := \text{Re}\{\mathbf{u}\} \in \mathbb{R}^N$ および $\mathbf{u}_I := \text{Im}\{\mathbf{u}\} \in \mathbb{R}^N$ はそれぞれ $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N$ の実部と虚部である。式(12)における $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^N$ に関する最小化は $\mathbf{s}_R \in \mathbb{R}^N$ と $\mathbf{s}_I \in \mathbb{R}^N$ に関する最小化に分離可能である。よって $\text{prox}_{\gamma h_2}(\mathbf{u})$ は実数領域における ℓ_1 ノルムの近接写像を用いて

$$[\text{prox}_{\gamma h_2}(\mathbf{u})]_n = \left[\text{prox}_{\gamma \|\cdot\|_1}(\mathbf{u}_R) \right]_n + j \cdot \left[\text{prox}_{\gamma \|\cdot\|_1}(\mathbf{u}_I) \right]_n \quad (13)$$

$$= \text{sign}([\mathbf{u}_R]_n) \max(|[\mathbf{u}_R]_n| - \gamma, 0) + j \cdot \text{sign}([\mathbf{u}_I]_n) \max(|[\mathbf{u}_I]_n| - \gamma, 0) \quad (14)$$

と書ける。ここで、 $[\mathbf{u}_R]_n$ および $[\mathbf{u}_I]_n$ はそれぞれ \mathbf{u}_R と \mathbf{u}_I の n 番目の成分である。式(10)と(14)を用いて、Algorithm 1で必要となる近接写像の計算を行うことができる。

Algorithm 1による \mathbf{x} の推定値 $\{\mathbf{s}^k\}$ の収束性に関して、以下の定理が成り立つ。

Theorem 1. 最適化問題(9)のラグランジュ関数 $\mathcal{L}(\mathbf{s}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}) :=$

$f(\mathbf{s}) + g(\mathbf{z}) + 2\text{Re}\{\boldsymbol{\theta}^H(\boldsymbol{\Phi}\mathbf{s} - \mathbf{z})\}$ が鞍点をもつとする。すなわち、ある $(\mathbf{s}^*, \mathbf{z}^*, \boldsymbol{\theta}^*)$ が存在してすべての $\mathbf{s}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}$ に対して

$$\mathcal{L}(\mathbf{s}^*, \mathbf{z}^*, \boldsymbol{\theta}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{s}^*, \mathbf{z}^*, \boldsymbol{\theta}^*) \leq \mathcal{L}(\mathbf{s}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}^*) \quad (15)$$

が成り立つとする。また、スパース正則化の関数 $g_\ell(\cdot)$ として $h_1(\cdot)$ と $h_2(\cdot)$ のいずれかを用いるとする。このとき、Algorithm 1 によって得られる点列 $\{\mathbf{s}^k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) は (9) の解に収束する。

Proof. [28] の Theorem 1 参照。□

3.4 IW-SCSR

本項では、IW-SOAV [10] のアイデアを応用し、SCSR 最適化を拡張した重み付き SCSR 最適化に基づく IW-SCSR を提案する。

関数 $g_\ell(\cdot)$ が $h_1(\cdot)$ や $h_2(\cdot)$ のように成分ごとの関数であると仮定し、SCSR 最適化 (4) を重み付き SCSR 最適化

$$\underset{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^N}{\text{minimize}} \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=1}^N q_{n,\ell} g_\ell(s_n - c_\ell) + \lambda \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2^2 \quad (16)$$

に拡張する。これにより、各シンボル s_n に異なる重み $q_{n,\ell}$ を用いることができるようになる。SCSR 最適化の場合と同様に、ADMM に基づくアルゴリズムによって重み付き SCSR 最適化問題の解に収束する点列が得られる。

提案手法の IW-SCSR では、重み付き SCSR 最適化 (16) とパラメータ $q_{n,\ell}$ の更新を繰り返す。このような繰り返しを用いるアプローチでは、一つ前の繰り返しで得られた推定値 $\hat{\mathbf{x}}^{\text{pre}} = [\hat{x}_1^{\text{pre}} \dots \hat{x}_N^{\text{pre}}]^T$ を用いて $q_{n,\ell}$ を更新することができる。本稿では

$$q_{n,\ell} = \frac{d_{n,\ell}^{-1}}{\sum_{\ell'=1}^L d_{n,\ell'}^{-1}} \quad (17)$$

を用いて更新を行う。ただし、 $d_{n,\ell} = |\hat{x}_n^{\text{pre}} - c_\ell|$ である。 $d_{n,\ell}$ が小さい場合は対応する $q_{n,\ell}$ が大きくなるため、 x_n の推定値が c_ℓ に近い値をとりやすくなる。Algorithm 2 に、IW-SCSR のアルゴリズムを示す。Algorithm 2 では、重み付き SCSR 最適化のパラメータ λ を、ある固定パラメータ β に対して

$$\frac{\text{E} \left[\sum_{\ell=1}^L \sum_{n=1}^N q_{n,\ell} g_\ell(x_n - c_\ell) \right]}{\text{E} \left[\lambda \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \right]} = \beta \quad (18)$$

が成り立つように選ぶ。これにより、観測雑音の大きさに対して適応的に λ を選択することが可能になる。

4. シミュレーション結果

計算機シミュレーションにより提案手法の特性を評価する。雑音ベクトル \mathbf{v} の成分は i.i.d. で平均 0、分散 σ_v^2 の円対称な複素ガウス分布に従うとする。IW-SCSR のパラメータ ρ は $\rho = 0.1$ とする。

4.1 MIMO 信号検出

図 3 は MIMO 信号検出における SER 特性を示す。送受信アンテナ数は $(N, M) = (50, 48)$ で与えられ、[10] と同様に、

Algorithm 2 IW-SCSR

Input: $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M, \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times N}$

Output: $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^N$

- 1: Initialize $q_{n,\ell}$ ($n = 1, \dots, N$ and $\ell = 1, \dots, L$).
- 2: **for** $t = 1$ to T **do**
- 3: Fix $\beta > 0, \rho > 0, \mathbf{z}^0 \in \mathbb{C}^{LN}$, and $\mathbf{w}^0 \in \mathbb{C}^{LN}$
- 4: $\lambda = \frac{\sum_{\ell'=1}^L p_{\ell'} \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=1}^N q_{n,\ell} g_\ell(c_{\ell'} - c_\ell)}{\beta M \sigma_v^2}$
- 5: **for** $k = 0$ to $K - 1$ **do**
- 6: $\mathbf{s}^{k+1} = (\rho L \mathbf{I}_N + \lambda \mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1}$
- 7: $\cdot (\rho \sum_{\ell=1}^L (\mathbf{z}_\ell^k - \mathbf{w}_\ell^k) + \lambda \mathbf{A}^H \mathbf{y})$
- 8: $\mathbf{z}_{n,\ell}^{k+1} = \text{prox}_{\frac{q_{n,\ell}}{2\rho} g_\ell} \left(s_n^{k+1} + w_{n,\ell}^k \right)$
- 9: ($n = 1, \dots, N$ and $\ell = 1, \dots, L$)
- 10: $\mathbf{w}_\ell^{k+1} = \mathbf{w}_\ell^k + \mathbf{s}^{k+1} - \mathbf{z}_\ell^{k+1}$ ($\ell = 1, \dots, L$)
- 11: **end for**
- 12: $d_{n,\ell} = |s_n^K - c_\ell|$ ($n = 1, \dots, N$ and $\ell = 1, \dots, L$)
- 13: $q_{n,\ell} = \frac{d_{n,\ell}^{-1}}{\sum_{\ell'=1}^L d_{n,\ell'}^{-1}}$ ($n = 1, \dots, N$ and $\ell = 1, \dots, L$)
- 14: **end for**
- 15: $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{s}^K$

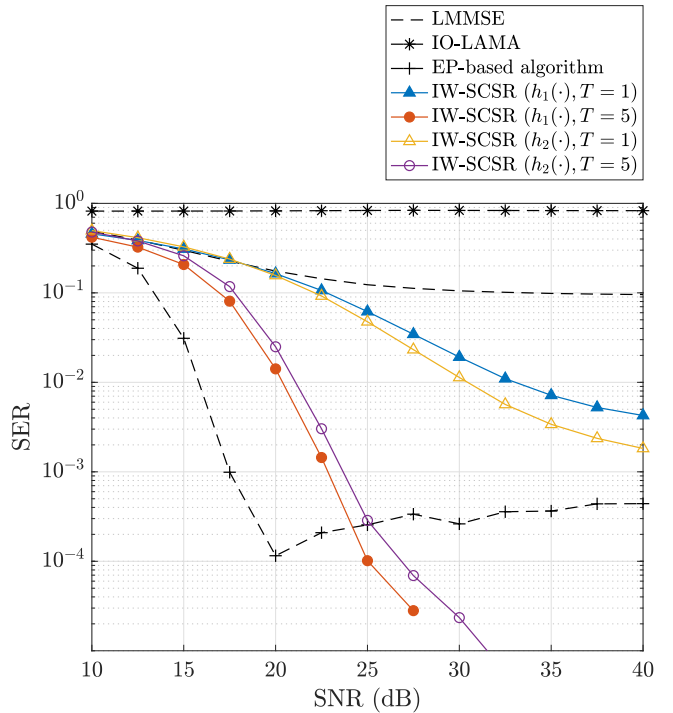


図 3 相関のある MIMO 通信における SER 特性 (8PSK, $(N, M) = (50, 48)$, $\beta = 15$)

送受信側双方で半波長間隔の等間隔リニアアレーを用いるとする。変調方式は 8PSK (Phase Shift Keying) を仮定し、 $\mathcal{C} = \{e^{j(\ell-1)\pi/4} \mid \ell = 1, \dots, 8\}$ であるとする。この場合 \mathcal{C} の要素の実部と虚部は独立ではなく、実数領域の SOAV 最適化ではその依存性を考慮することができない。‘LMMSE’ は線形 MMSE 法、‘IO-LAMA’ は近似メッセージ伝播法に基づく手法 [16]、‘EP-based algorithm’ は期待値伝播法に基づく手法 [18] を表す。‘IW-SCSR’ が提案手法であり、 T はパラメータの更新回数を表す。‘IW-SCSR ($h_1(\cdot)$)’ はスパース正則化の

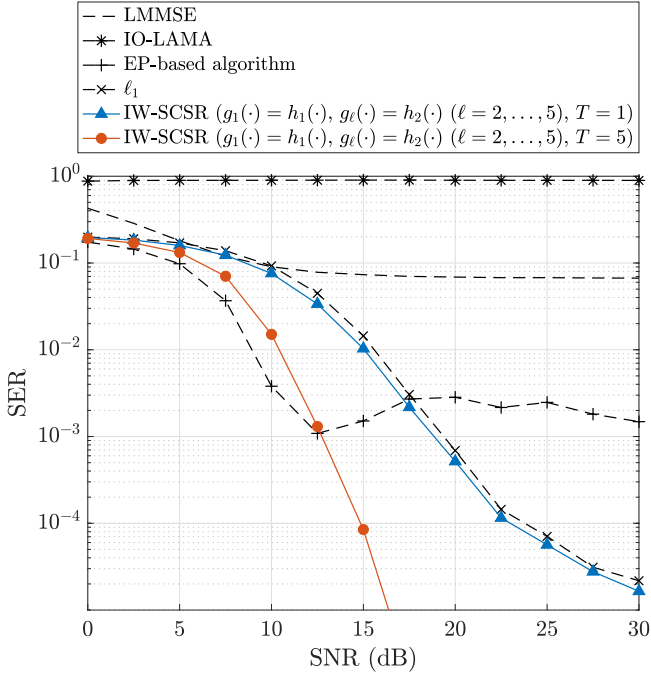


図4 相関のあるMIMO通信におけるSER特性 ($C = \{0, 1+j, -1+j, -1-j, 1-j\}$, $(N, M) = (50, 30)$, $\|\mathbf{x}\|_0 = 10$, $\beta = 10$)

関数 $g_\ell(\cdot)$ を $g_\ell(\cdot) = h_1(\cdot)$ ($\ell = 1, \dots, 8$) としたものであり, ‘IW-SCSR ($h_2(\cdot)$)’ は $g_\ell(\cdot) = h_2(\cdot)$ ($\ell = 1, \dots, 8$) としたものである. パラメータ $q_{n,\ell}$ は $q_{n,\ell} = 1/8$ と初期化し, λ は $\beta = 15$ により定めた. パラメータの更新と重み付きSCSR最適化を繰り返すことで大きく特性が改善され, $T = 5$ の場合にはSNR (Signal-to-Noise Ratio) が高い領域で従来の手法よりも良い特性を達成可能であることがわかる.

図4は, 送信アンテナ数 $N = 50$, 受信アンテナ数 $M = 30$ の相関のあるMIMO通信におけるSER特性を示す. また, $c_1 = 0, c_2 = 1+j, c_3 = -1+j, c_4 = -1-j, c_5 = 1-j$ とする. 未知ベクトル \mathbf{x} は $\|\mathbf{x}\|_0 = 10$ を満たし, その非零成分は $1+j, -1+j, -1-j, 1-j$ のいずれかの値をランダムにとるとする. IW-SCSRのパラメータは $q_{n,1} = 0.8$ および $q_{n,2} = \dots = q_{n,5} = 0.05$ と初期化し, スパース正則化の関数 $g_\ell(\cdot)$ は $g_1(\cdot) = h_1(\cdot)$ および $g_\ell(\cdot) = h_2(\cdot)$ ($\ell = 2, \dots, 5$) とする. パラメータ λ は $\beta = 10$ により定める. ‘ l_1 ’ はスパース性のみを用いる l_1 最適化を表す. この場合も, $T = 5$ の場合にはSNRが高い領域で従来の手法よりも良い特性を達成可能であることがわかる.

4.2 通信路等化

図5および図6は, 通信路等化 [29–31] におけるSER特性を示す. 図5では変調方式としてQPSK (Quadrature Phase Shift Keying) を仮定し, $C = \{1+j, -1+j, -1-j, 1-j\}$ とした. パス数は $L_p = 5$, ブロック長は $Q = 32$ とし, ブロック間干渉の除去のためサイクリックプレフィックスを用いるものとする. 送受信アンテナ数は $(N_t, N_r) = (4, 3)$ で与えられ, 各アンテナ間のインパルス応答 $\{\gamma_{n_r, n_t}^{(i)}\}$ ($i = 0, \dots, L_p$) は i.i.d. で平均0, 分散1の円対称な複素ガウス分布に従うとす

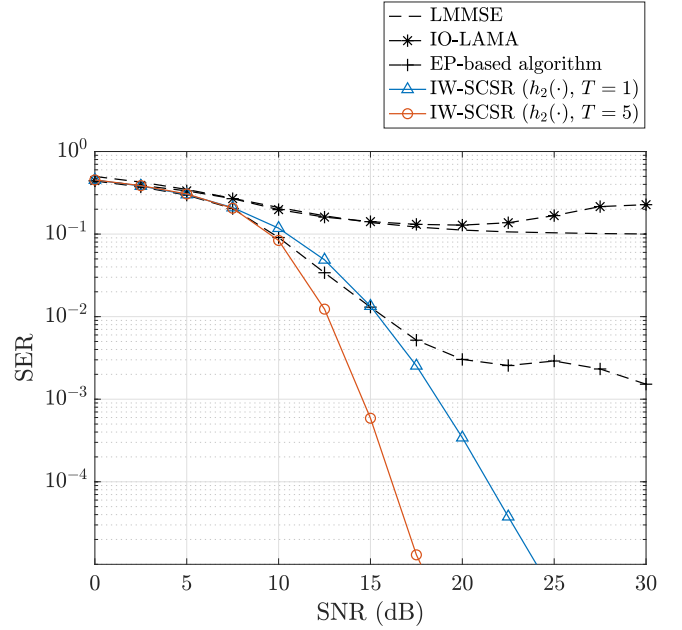


図5 通信路等化におけるSER特性 (QPSK, $(N, M) = (128, 96)$, $(N_t, N_r) = (4, 3)$, $L_p = 5$, $Q = 32$, $\beta = 15$)

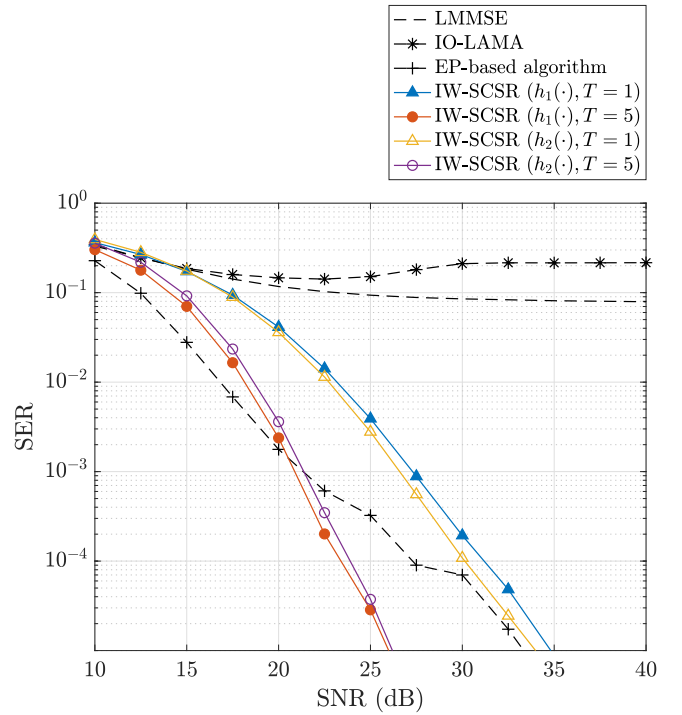


図6 通信路等化におけるSER特性 (8PSK, $(N, M) = (64, 64)$, $(N_t, N_r) = (2, 2)$, $L_p = 5$, $Q = 32$, $\beta = 15$)

る. SNR は $(L_p N_t / N) E[\|\mathbf{x}\|_2^2] / \sigma_v^2$ で定義する. IW-SCSRで用いる正則化関数は $g_\ell(\cdot) = h_2(\cdot)$ ($\ell = 1, \dots, 4$) とした. パラメータ q_ℓ は $q_{n,\ell} = 1/4$ と初期化し, λ は $\beta = 15$ により定めた. 図6は $(N_t, N_r) = (2, 2)$ で8PSKを用いた場合のSER特性である. IW-SCSRにおける正則化関数やパラメータは図3と同じものを用いた. 図5および図6から, 提案手法のIW-SCSRが従来の手法に比べて良い特性を達成することがわかる. 近似メッセージ伝播法や期待値伝播法に基づく手法で良い特性を得

られていないのは、観測行列がブロック巡回行列 [31] の構造をもっているためであると考えられる。

5. ま と め

本項では、劣線形観測から複素離散値ベクトルの再構成を行う SCSR 最適化問題を提案した。SCSR 最適化では、スパース正則化項の和を複素離散値ベクトルのための正則化項として用いる。また、SCSR 最適化を重み付き SCSR 最適化に拡張し、重み付き SCSR 最適化とその目的関数のパラメータの更新を繰り返し行う IW-SCSR を提案した。計算機シミュレーションにより、MIMO 信号検出や通信路等化において IW-SCSR が従来の手法よりも良い特性を達成可能であることを示した。今後の課題としては、提案手法の特性の理論解析や、 λ や $q_{n,\ell}$ などのパラメータの影響の調査などが挙げられる。

謝辞 本研究の一部は、科学研究費補助金（研究課題番号 18K04148, 18H03765, 17J07055）及び、総務省の電波資源拡大のための研究開発における委託研究課題「IoT 機器増大に対応した有無線最適制御型電波有効利用基盤技術の研究開発」によるものです。

文 献

- [1] L. Lu, G. Y. Li, A. L. Swindlehurst, A. Ashikhmin, and R. Zhang, “An overview of massive MIMO: Benefits and challenges,” *IEEE J. Sel. Signal Process.*, vol. 8, no. 5, pp. 742–758, Oct. 2014.
- [2] A. Chockalingam and B. S. Rajan, *Large MIMO systems*. Cambridge University Press, 2014.
- [3] S. Yang and L. Hanzo, “Fifty years of MIMO detection: The road to large-scale MIMOs,” *IEEE Commun. Surveys Tuts.*, vol. 17, no. 4, pp. 1941–1988, Fourthquarter 2015.
- [4] S. Verdú, *Multiuser Detection*. Cambridge University Press, 1998.
- [5] H. Zhu and G. B. Giannakis, “Exploiting sparse user activity in multiuser detection,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 59, no. 2, pp. 454–465, Feb. 2011.
- [6] H. Sasahara, K. Hayashi, and M. Nagahara, “Multiuser detection based on MAP estimation with sum-of-absolute-values relaxation,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 65, no. 21, pp. 5621–5634, Nov. 2017.
- [7] K. K. Wong, A. Paulraj, and R. D. Murch, “Efficient high-performance decoding for overloaded MIMO antenna systems,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 6, no. 5, pp. 1833–1843, May 2007.
- [8] T. Datta, N. Srinidhi, A. Chockalingam, and B. S. Rajan, “Low-complexity near-optimal signal detection in underdetermined large-MIMO systems,” in *Proc. IEEE NCC*, Feb. 2012.
- [9] T. Takahashi, S. Ibi, and S. Sampei, “Criterion of adaptively scaled belief for PDA in overloaded MIMO channels,” in *Proc. Asilomar Conf. Signals, Syst., Comput.*, Oct. 2017.
- [10] R. Hayakawa and K. Hayashi, “Convex optimization-based signal detection for massive overloaded MIMO systems,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 16, no. 11, pp. 7080–7091, Nov. 2017.
- [11] —, “Discreteness-aware decoding for overloaded non-orthogonal STBCs via convex optimization,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 22, no. 10, pp. 2080–2083, Oct. 2018.
- [12] J. E. Mazo, “Faster-than-Nyquist signaling,” *Bell System Tech. J.*, vol. 54, no. 8, pp. 1451–1462, Oct. 1975.
- [13] J. B. Anderson, F. Rusek, and V. Öwall, “Faster-than-Nyquist signaling,” *Proc. IEEE*, vol. 101, no. 8, pp. 1817–1830, Aug. 2013.
- [14] F. M. Han, M. Jin, and H. X. Zou, “Binary symbol recovery via ℓ_∞ minimization in faster-than-Nyquist signaling systems,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 62, no. 20, pp. 5282–5293, Oct. 2014.
- [15] H. Sasahara, K. Hayashi, and M. Nagahara, “Symbol detection for faster-than-Nyquist signaling by sum-of-absolute-values optimization,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 23, no. 12, pp. 1853–1857, Dec. 2016.
- [16] C. Jeon, R. Ghods, A. Maleki, and C. Studer, “Optimality of large MIMO detection via approximate message passing,” in *Proc. IEEE ISIT*, Jun. 2015.
- [17] J. Céspedes, P. M. Olmos, M. Sánchez-Fernández, and F. Perez-Cruz, “Expectation propagation detection for high-order high-dimensional MIMO systems,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 62, no. 8, pp. 2840–2849, Aug. 2014.
- [18] K. Takeuchi, “Rigorous dynamics of expectation-propagation-based signal recovery from unitarily invariant measurements,” in *Proc. IEEE ISIT*, Jun. 2017.
- [19] R. Hayakawa and K. Hayashi, “Discreteness-aware approximate message passing for discrete-valued vector reconstruction,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 66, no. 24, pp. 6443–6457, Dec. 2018.
- [20] P. H. Tan, L. K. Rasmussen, and T. J. Lim, “Constrained maximum-likelihood detection in CDMA,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, no. 1, pp. 142–153, Jan. 2001.
- [21] A. Aïssa-El-Bey, D. Pastor, S. M. A. Sbaï, and Y. Fadlallah, “Sparsity-based recovery of finite alphabet solutions to underdetermined linear systems,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 61, no. 4, pp. 2008–2018, Apr. 2015.
- [22] M. Nagahara, “Discrete signal reconstruction by sum of absolute values,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 22, no. 10, pp. 1575–1579, Oct. 2015.
- [23] D. Gabay and B. Mercier, “A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 2, no. 1, pp. 17–40, 1976.
- [24] J. Eckstein and D. P. Bertsekas, “On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators,” *Math. Program.*, vol. 55, no. 1, pp. 293–318, Apr. 1992.
- [25] P. L. Combettes and J.-C. Pesquet, “Proximal splitting methods in signal processing,” in *Fixed-point algorithms for inverse problems in science and engineering*. Springer, 2011.
- [26] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, and J. Eckstein, “Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers,” *Foundations and Trends® in Machine Learning*, vol. 3, no. 1, pp. 1–122, 2011.
- [27] L. Li, X. Wang, and G. Wang, “Alternating direction method of multipliers for separable convex optimization of real functions in complex variables,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, 2015.
- [28] R. Hayakawa and K. Hayashi, “Reconstruction of complex discrete-valued vector via convex optimization with sparse regularizers,” *IEEE Access*, (accepted).
- [29] Z. Wang and G. B. Giannakis, “Wireless multicarrier communications,” *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 17, no. 3, pp. 29–48, May 2000.
- [30] T. Abe and T. Matsumoto, “Space-time turbo equalization in frequency-selective MIMO channels,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 52, no. 3, pp. 469–475, May 2003.
- [31] N. Souto and R. Dinis, “MIMO detection and equalization for single-carrier systems using the alternating direction method of multipliers,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 23, no. 12, pp. 1751–1755, Dec. 2016.